ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d'ADMISSION 1986

EPREUVE ECRITE OBLIGATOIRE d'ADMISSIBILITE [Coefficient : 3]

MATHEMATIQUES *(Temps accordé : 4 heures)*

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants.

L'usage des tables numériques, des règles à calcul et des calculatrices électroniques de poche, à alimentation autonome, non imprimantes est autorisé ; leurs annexes éventuelles (notice d'emploi, cartes magnétiques, modules enfichables, etc...) sont interdites.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

- Les copies illisibles, mal présentées ou mal rédigées seront inévitablement pénalisées.
- Chaque candidat indiquera sur chaque copie le numéro de celle-ci et le nombre total de copies rendues.
- De plus, pour les candidats originaires des classes T.A., la numérotation des pages sera précédée de l'indication : T.A.

PREMIER EXERCICE

1°/ On considère la fonction numérique g telle que :

$$g(x) = (x-1)^2 e^{-x} .$$

a) Tracer la courbe représentative de g .

b) Déterminer, suivant le nombre réel h , le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = h$.

Pour tout nombre réel λ , on considère la fonction numérique f_λ telle que :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda (x^2+1) e^{-x}$$

et on appelle Γ_λ la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

2°/ Montrer que par tout point du plan passe une courbe Γ_λ et une seule.

3°/ Montrer que les courbes Γ_λ admettent une asymptote commune.

4°/ Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 3 de f_λ .

5°/ Déterminer, suivant λ , le nombre de points où Γ_λ admet une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble L de ces points quand λ parcourt $\mathbb{R}$.

6°/ Etudier, suivant le paramètre λ , la concavité de Γ_λ .

7°/ Soit k un nombre réel.

Pour tout nombre réel λ , on considère la tangente $T_{\lambda,k}$ à Γ_λ au point $\left(k , f_\lambda(k)\right)$.

Montrer que, pour k différent de 1 , les droites $T_{\lambda,k}$ sont concourantes en un point M_k dont on précisera les coordonnées.

Que peut-on dire si $k = 1$?

8°/ Dresser les tableaux de variations de f_{-2} , f_3 et f_7 .
(on ne demande pas de préciser numériquement les extrema).

Représenter sur le même graphique les courbes L , Γ_0 , Γ_{-2} , Γ_3 et Γ_7 .

TOURNER S.V.P.

Page 206 1986 Ecole Nat. Sup. des techniques indust. et des Mines de Douai .Mathematiques

DEUXIEME EXERCICE

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M dans la base canonique.

Soit $E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \; ; \; \exists\, (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5 \; , \; M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}$

1°/a) Montrer que E, muni des lois usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $(E, +, \times)$ a une structure d'anneau.

Soit $F = \left\{ N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \; ; \; \exists\, (\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 \; , \; N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}$

2°/ a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et un sous-anneau de E.

b) Soit $N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de N suivant les valeurs des paramètres.

c) Montrer qu'il existe une droite D de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall N \in F \; , \quad D \subset \operatorname{Ker} f_N \; .$$

d) Montrer qu'il existe un plan P de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall N \in F \; , \quad \operatorname{Im} f_N \subset P \; .$$

Donner une base orthonormée de P.

N appartenant à F, on note $\tilde{f}_N$ la restriction de f_N à P.

3°/ a) Montrer que $\varphi : F \longrightarrow \mathcal{L}(P)$, $N \longmapsto \tilde{f}_N$ est un isomorphisme d'algèbres.

($\mathcal{L}(P)$ désigne l'algèbre des endomorphismes du plan vectoriel P).

b) Soit $N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon)$ pour que $\tilde{f}_N$ soit une isométrie.

c) Soit $A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$

Vérifier que $\tilde{f}_A$ est une isométrie de P.

Déterminer la nature et l'élément caractéristique de cette isométrie.

4°/ a) Montrer que :

$$\forall M \in E \; , \quad f_M(P) \subset P \quad \text{et} \quad f_M(D) \subset D \; .$$

b) M appartenant à E, soit f'_M la restriction de f_M à P.

Soit N appartenant à F telle que $f'_M = \tilde{f}_N$.

Déterminer N en fonction de M.

TOURNER S.V.P.

TROISIEME EXERCICE

Dans cet exercice, on notera de la même façon un polynôme et la fonction polynôme associée. On désigne par $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. Par convention : $\forall z \in \mathbb{C}^*, z^0 = 1$.

On considère l'application f : $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

1°/ a) Montrer que f est surjective.

b) Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$.

Déterminer l'image F de Γ par f.

Montrer que l'image réciproque de F est Γ.

c) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ 0 < |z| < 1\}$.

Montrer que l'application g : $D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus F$

$$z \longmapsto z + \frac{1}{z}$$

est une bijection.

2°/ a) Montrer que, pour tout nombre entier positif ou nul n, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad , \quad f(z^n) = P_n\left(f(z)\right)$$

et que :

$$\forall n > 1 \ , \ P_{n+1} = X P_n - P_{n-1}$$

b) Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3.

c) Déterminer le degré de P_n.

Etudier la parité de P_n.

3°/ Pour tout nombre entier n strictement positif, on considère l'équation algébrique dans $\mathbb{C}$:

$$(E_n) \qquad P_n(x) = 0 .$$

a) Résoudre l'équation (E_n).

b) Vérifier que (E_n) admet n racines réelles distinctes (classées par ordre décroissant, elles seront notées $x_{n,k}$, k variant de 0 à $n-1$).

On suppose que n est supérieur ou égal à 2. Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n-2\} \ , \ x_{n,k} > x_{n-1,k} > x_{n,k+1} .$$

Etant donné un nombre complexe b, on considère pour tout n entier strictement supérieur à 2 l'équation algébrique dans $\mathbb{C}$:

$$(F_n) \qquad P_n(x) = b .$$

4°/ On suppose que b n'appartient pas à l'intervalle réel $[-2, +2]$.
Montrer que (F_n) admet n racines distinctes.

5°/ On suppose que b appartient à l'intervalle réel $[-2, +2]$ et on pose $\theta = \text{Arc cos } \frac{b}{2}$.

a) Exprimer les racines de (F_n) en fonction de θ.

b) Pour quelles valeurs de b l'équation (F_n) admet-elle des racines doubles ?